**Complexe Analyse** 21-03-03

## Tentamenopgave[1]

### I

1. Formuleer het maximum-modulusprincipe.

2. Laat $a_1, \ldots, a_n$ punten op de eenheidscirkel $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ zijn. Toon aan dat er een punt $z \in C$ bestaat zodat het product van de afstanden van $z$ tot de $a_j$ minstens 1 is.

### II

1. Formuleer een versie van de stelling van Cauchy en van de formule van Cauchy.

2. Bereken de integralen

$$\int_\Gamma \frac{dz}{2z^2 + z + 1}, \qquad \Gamma = \{z : |z| = \tfrac{1}{2}\}.$$

$$\int_\Gamma \frac{\sin(z)}{z + 3} dz, \qquad \Gamma = \{z : |z| = 5\}.$$

N.B. Alle cirkels in vraag II en III worden geacht positief (anti-klok) georiënteerd te zijn.

### III

1. Formuleer de residu-stelling.

2. Bereken de integralen $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\sin(z)}{1 + z^2} dz$, i. met $\Gamma = \{z : |z| = 2\}$. ii. met $\Gamma = \{z : |z| = \frac{1}{2}\}$.

3. Bereken de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1 + x^2} dx$.

4. Bereken de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$.

### IV

1. Formuleer het principe van eenduidige analytische voortzetting.

2. Zij $f$ een holomorfe functie op een strip $\Omega = \{z : |\text{Im } (z)| < R\}$. Zij $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$.

a. Toon aan dat $F$ holomorf is op $\Omega$.

b. Stel $f(x) \in \mathbb{R}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Toon aan dat $F(z) = f(z)$ voor alle $z \in \Omega$.

[1] De onderdelen I, II, III en IV zijn onafhankelijk.